y $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$, generalmente escribiremos $M_{\mathscr{R}}(f)$ en vez de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f)$.

La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es de tamaño $(m+1)\times(n+1)$ y cumple lo siguiente: Sea $p \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\mathrm{Ker}(\phi))$, sean $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$ y sean $(x'_0 : x'_1 : \cdots : x'_m)$ las coordenadas de $f(p)$ respecto de $\mathscr{R}'$. Entonces

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposición 8.37. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva entre dos espacios proyectivos $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ de la misma dimensión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *La aplicación f es una proyectividad.*
(2) *La matriz de f respecto a un par de referencias proyectivas es invertible.*
(3) *La matriz de f respecto a cualquier par de referencias proyectivas es invertible.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 8.38. *(matriz de cambio de referencia proyectiva).* Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ dos referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$. La matriz de cambio de referencia proyectiva $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ entre $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ es la matriz (de tamaño $(n+1)\times(n+1)$) $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}\mathrm{id}$, o lo que es lo mismo, la matriz de cambio de base de B a B', donde B es una base asociada a $\mathscr{R}$ y B' es una base asociada a $\mathscr{R}'$. Como en el caso de la matriz de una aplicación proyectiva, en realidad no existe una única matriz de cambio de referencia proyectiva entre $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$; dicha matriz es única solo salvo producto por un escalar no nulo.

En el siguiente resultado vemos la fórmula que cumple la matriz de una composición de aplicaciones proyectivas (observa que la fórmula es la misma que la que cumple una composición de aplicaciones lineales o de aplicaciones afines (véase la proposición 4.16)):

Proposición 8.39. *Sean $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tres espacios proyectivos y sean $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ respectivamente. Sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ y sea g una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tal que la imagen de f no está contenida en el centro de g. Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}''}(g) \cdot M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$$

es una matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}''}(g \circ f)$ de la aplicación $g \circ f$ respecto de las referencias proyectivas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}''$.

Demostración. Sean B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente, asociadas a $\mathscr{R}, \mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$. Si f y g vienen inducidas por las aplicaciones lineales ϕ y ψ respectivamente, la proposición 8.5 nos dice que $g \circ f$ viene inducida por $\psi \circ \phi$, por lo que $M_{B,B''}(\psi \circ \phi)$ es una matriz de $g \circ f$ respecto de las referencias $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}''$. Asimismo $M_{B,B'}(\phi)$ es una matriz de f respecto de las referencias $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ y $M_{B',B''}(\psi)$ es una matriz de g respecto de las referencias $\mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$. Como

$$M_{B,B''}(\psi \circ \phi) = M_{B',B''}(\psi) \cdot M_{B,B'}(\phi),$$

tenemos el resultado. □

Corolario 8.40. *Sean* $\mathbf{P}(V)$ *y* $\mathbf{P}(V')$ *dos espacios proyectivos.*

(1) *Supongamos que* $\mathbf{P}(V)$ *y* $\mathbf{P}(V')$ *tienen la misma dimensión y sean* $\mathscr{R}$ *y* $\mathscr{R}'$ *referencias proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$ *y* $\mathbf{P}(V')$ *respectivamente. Sea* $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ *una proyectividad. Entonces la matriz* $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)^{-1}$ *es una matriz de* f^{-1} *respecto de las referencias* $\mathscr{R}'$ *y* $\mathscr{R}$.

(2) *Sea* $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ *una aplicación proyectiva entre* $\mathbf{P}(V)$ *y* $\mathbf{P}(V')$, *sean* $\mathscr{R}_1$ *y* $\mathscr{R}_2$ *dos referencias proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$ *y sean* $\mathscr{R}'_1$ *y* $\mathscr{R}'_2$ *dos referencias proyectivas de* $\mathbf{P}(V')$. *Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}'_1,\mathscr{R}'_2} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}'_1}(f) \cdot M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$$

es una matriz $M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}'_2}(f)$ *de la aplicación* f *respecto de* $\mathscr{R}_2$ *y* $\mathscr{R}'_2$.

(3) *Sean* $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ *y* $\mathscr{R}_3$ *tres referencias proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$. *Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$$

es una matriz $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}$ *de cambio de la referencia* $\mathscr{R}_1$ *a la referencia* $\mathscr{R}_3$.

(4) *Sean* $\mathscr{R}_1$ *y* $\mathscr{R}_2$ *dos referencias proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$. *Entonces* $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$ *es una matriz invertible y* $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2} = M^{-1}_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$.

Demostración. El resultado se obtiene de la proposición 8.39 razonando de manera análoga a la demostración del corolario 4.17. □

Terminamos esta subsección viendo algunos ejemplos de matrices de aplicaciones proyectivas y de cambio de referencia.

Ejemplo 8.41. La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de la proyectividad f del ejemplo 8.18 respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$. Asimismo, para todo $\lambda \in \mathbf{R}^*$, cada matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es también una matriz de la proyectividad f del ejemplo 8.18 respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$.

Ejercicio 8.42. Sean $L_1 = \mathbf{P}(W_1)$ y $L_2 = \mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos, el segundo de ellos de dimensión l_2, de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, que cumplen las condiciones (1) y (2) de la definición 8.9. Sea π la proyección desde L_1 sobre L_2. Demuestra que existe una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ tal que las matrices de f respecto de $\mathscr{R}$ tienen todos los elementos nulos, excepto los $l_2 + 1$ primeros elementos de la diagonal, que son iguales a un mismo escalar no nulo de $\mathbf{k}$ (indicación: considera una base B de V formada por una base de W_2 y una base de W_1 y una referencia $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ que tenga a B como base asociada).

Ejemplo 8.43. Sea π la proyección del ejemplo 8.12. Para cada número real λ no nulo, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de π respecto de la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$. Para cada número real λ no nulo, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de π respecto de la referencia $\mathscr{R} = \{(1 : -1 : 0 : 0), (1 : 0 : -1 : 0), (1 : 0 : 0 : -1), (0 : 0 : 0 : 1); (1 : -1 : 1 : 0)\}$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ (la referencia $\mathscr{R}$ tiene a $B = \{(1, -1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ como una base asociada).

Ejemplo 8.44. Sea $\mathscr{R}$ la referencia proyectiva de la observación 8.30, (2). Para cada $\lambda \in \mathbf{k}^*$, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de cambio de $\mathscr{R}$ a la referencia canónica.

Compleción de una aplicación afín.

Recordemos que una forma de entender el espacio proyectivo $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es como el completado del espacio afín $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, añadiendo a $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ sus puntos del infinito para obtener $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Esto nos da una forma (no única) de sumergir $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, mediante

$$i_n : \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$$

(véase (7.4.1)). Igual que, dado un subespacio afín L de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, lo hemos completado en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ obteniendo un subespacio proyectivo $\overline{L}$ (al que hemos llamado completado proyectivo de L), veremos ahora que también se puede completar una aplicación afín f entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ a una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$. Nuestro objetivo es encontrar una aplicación proyectiva $\overline{f}$ entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ que “extienda” a f, es decir, que haga el diagrama

(8.44.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_n"] & \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}} \arrow[d, "i_m"] \\ \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \mathbf{P}^m_{\mathbf{k}} \end{tikzcd}$$

conmutativo, o sea, que cumpla $\overline{f} \circ i_n = i_m \circ f$. Dicho de otra forma, queremos que la restricción $\overline{f}$ a los puntos “afines” de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (los que vienen de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$) coincida con f.

Proposición 8.45. *Sea f una aplicación afín entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ y sea*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & M \end{pmatrix}$$

la matriz de f respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ (véase (4.13.1)*; en particular, M es la matriz de $\vec{f}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{k}^n$ y $\mathbf{k}^m$). Sea $\overline{f}$ la aplicación* *proyectiva entre $\mathbf{P}^n_\mathbf{k}$ y $\mathbf{P}^m_\mathbf{k}$ que tiene a la matriz N como una matriz asociada respecto de las referencias proyectivas canónicas de $\mathbf{P}^n_\mathbf{k}$ y $\mathbf{P}^m_\mathbf{k}$. Entonces $\overline{f}$ es la única aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}^n_\mathbf{k}$ y $\mathbf{P}^m_\mathbf{k}$ que hace conmutativo el diagrama* (8.44.1).

Demostración. Vemos que $\overline{f}$ hace conmutativo el diagrama (8.44.1). Para eso basta ver que dado $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$, $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$ implica $\overline{f}(1 : x_1 : \cdots : x_n) = (1 : y_1 : \cdots : y_m)$. Esto se sigue trivialmente de las observaciones 4.13 y 8.36.

Veamos ahora que $\overline{f}$ es la única aplicación proyectiva que hace conmutativo el diagrama (8.44.1). Sea $\overline{g}$ otra aplicación proyectiva que haga conmutativo el diagrama (8.44.1) y supongamos que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ vienen inducidas respectivamente por aplicaciones lineales ϕ y ψ entre $\mathbf{k}^{n+1}$ y $\mathbf{k}^{m+1}$. Supongamos primero que f es constante y que su imagen es un punto p. En ese caso es fácil ver que tanto la imagen de $\overline{f}$ como la imagen de $\overline{g}$ es $i_m(p)$ y que tanto el centro de $\overline{f}$ como el centro de $\overline{g}$ es el hiperplano del infinito, por lo que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son la misma aplicación proyectiva.

Supongamos ahora que f no es constante. Vamos a ver que $\psi = \lambda\phi$ para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Primero veremos que esto es cierto para la restricción de ϕ y ψ al conjunto de los vectores de $\mathbf{k}^{n+1}$ que son representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_\mathbf{k})$. Sea $v \in \mathbf{k}^{n+1}$ tal que $[v] = i_n(p) \in i_n(\mathbf{A}^n_\mathbf{k})$. Como $\overline{f}(i_n(p)) = i_m(f(p)) = \overline{g}(i_n(p))$, existe $\lambda_v \in \mathbf{k}^*$ tal que $\psi(v) = \lambda_v\phi(v)$. Queremos comprobar que λ_v es el mismo para todo v. Si w es múltiplo de v, $\lambda_w = \lambda_v$ por linearidad.

Sean ahora $p, q \in \mathbf{A}^n_\mathbf{k}$, $p \neq q$ tales que $f(p) \neq f(q)$ y sea r un punto de la recta $< p, q >$, distinto de p y q. Sean $v, w \in \mathbf{k}^{n+1}$ tales que $i_n(p) = [v]$, $i_n(q) = [w]$ e $i_n(r) = [v + w]$ (es decir, $\{v, w\}$ es una base asociada a la referencia proyectiva $\{i_n(p), i_n(q); i_n(r)\}$ de la recta proyectiva que se obtiene al completar la recta afín $< p, q >$). Veamos que $\lambda_v = \lambda_w$. Tenemos

$$\lambda_{v+w}\phi(v) + \lambda_{v+w}\phi(w) = \lambda_{v+w}\phi(v + w) = \psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w) = \lambda_v\phi(v) + \lambda_w\phi(w).$$

Como $f(p) \neq f(q)$, $\psi(v)$ y $\psi(w)$ son linealmente independientes por lo que $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Además, por linearidad, si v', w' son tales que $p = [v']$ y $q = [w']$, entonces $\lambda_{v'} = \lambda_{w'}$.

Sean ahora $p, q \in \mathbf{A}^n_\mathbf{k}$, $p \neq q$ con $f(p) = f(q)$ y sea $r \in \mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ tal que $f(p) \neq f(r)$ (tal r existe porque f no es constante). Sean $v, w, u \in \mathbf{k}^{n+1}$ tales que $i_n(p) = [v], i_n(q) = [w], i_n(r) = [u]$. Entonces, por el párrafo anterior, $\lambda_v = \lambda_u$ y $\lambda_w = \lambda_u$, por lo que $\lambda_v = \lambda_w$.

Por tanto, hemos visto que para cualquier pareja de vectores v, w de $\mathbf{k}^{n+1}$, representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_\mathbf{k})$, existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\psi(v) = \lambda\phi(v)$ y $\psi(w) = \lambda\phi(w)$. Como entre los representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_\mathbf{k})$ podemos elegir una base de $\mathbf{k}^{n+1}$, por ejemplo $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $v_1 = (1, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_{n-1} = (1, 0, \dots, 1, 0)$, $v_n = (1, 0, \dots, 0, 1)$ y ψ y $\lambda\phi$ toman los mismos valores en $\{v_0, \dots, v_n\}$, ψ y $\lambda\phi$ son iguales como aplicaciones lineales entre $\mathbf{k}^{n+1}$ y $\mathbf{k}^{m+1}$, por lo que $\overline{f} = \overline{g}$. □

Definición 8.46. Llamamos a $\overline{f}$ el *completado proyectivo* de f.

La forma de obtener $\overline{f}$ a partir de la matriz de f es más bien algebraica, por lo que nos gustaría entender el significado geométrico de la extensión de f a $\overline{f}$:

Proposición 8.47. *Sea $f : \mathbf{A}^n_\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{A}^m_\mathbf{k}$ una aplicación afín y sea $\overline{f} : \mathbf{P}^n_\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{P}^m_\mathbf{k}$ su completado proyectivo. Sea $v = (x_1, \dots, x_n)$ un vector de $\mathbf{k}^n$, sea $\overrightarrow{f}(v) = w = (y_1, \dots, y_m)$, sea $\tilde{w} = (0, y_1, \dots, y_n)$ y sea $p = (0 : x_1 : \cdots : x_n)$. Entonces $\overline{f}(p) = [\tilde{w}]$.*

Demostración. La proposición se sigue de (4.12.1) y de la proposición 8.45. □

¿Cuál es el significado geométrico de la proposición 8.47? Para conocer la imagen de $\overline{f}$ en cada punto de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ tenemos que tratar con dos tipos de puntos: aquellos que provienen de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (es decir, los de $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$) y aquellos que pertenecen al hiperplano del infinito H_∞. En cuanto a los primeros, ya sabemos por la proposición 8.45 que (identificando $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$ mediante i_n) $\overline{f}$ coincide con f en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (por eso $\overline{f}$ es una "extensión" de f). Lo que nos dice la proposición 8.47 es que el valor de $\overline{f}$ en los puntos del hiperplano del infinito viene dictado por $\overrightarrow{f}$. En efecto, si $(0 : x_1 : \cdots : x_n)$ es un punto del infinito y $\overrightarrow{f}((x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_m)$, entonces $\overline{f}((0 : x_1 : \cdots : x_n)) = (0 : y_1 : \cdots : y_m)$. Es decir, geométricamente, la restricción de $\overline{f}$ al hiperplano del infinito describe la forma en que $\overrightarrow{f}$ transforma las direcciones de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Corolario 8.48. Sea H^n_∞ el hiperplano del infinito de (la inmersión i_n de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en) $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y sea H^m_∞ el hiperplano del infinito de (la inmersión i_m de $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ en) $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$. Sea f una aplicación afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ y sea $\overline{f}$ el completado proyectivo de f. Entonces

(1) Una aplicación proyectiva $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín si y solo si
  (i) el centro de $\overline{g}$ está contenido en H^n_∞;
  (ii) $\overline{g}(i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})) \subset i_m(\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}})$; y
  (iii) $\overline{g}(H^n_\infty) \subset H^m_\infty$.
(2) Si f es una aplicación afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $\overline{f}$ es una proyectividad si y solo si f es un isomorfismo afín.

Demostración. Veamos que si $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín, entonces se cumplen (i), (ii) y (iii). La propiedad (i) se sigue de que $\overline{g}$ está definida en $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$. Por otra parte (ii) se sigue de la proposición 8.45 y (iii) de la proposición 8.47.

Demostramos ahora la otra implicación de (1). Sea $\overline{g}$ una aplicación proyectiva que cumple (i), (ii) y (iii). En ese caso la imagen de $(1 : 0 : \cdots : 0)$ por $\overline{g}$ está bien definida y pertenece a $i_m(\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}})$ por lo que el primer coeficiente de la primera fila de una matriz N de $\overline{g}$ respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ es no nulo. Por otra parte, la imagen por $\overline{g}$ de cada uno de los puntos $(0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \ldots, (0 : 0 : \cdots : 0 : 1)$ o bien no está definida (porque alguno de esos puntos puede estar en el centro de $\overline{g}$), o bien pertenece a H^m_∞. En cualquiera de los casos eso implica que el resto de los coeficientes de la primera fila de N han de ser nulos. De aquí se deduce que, multiplicando N por una constante no nula si es necesario, $\overline{g}$ tiene una matriz con respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ como la matriz de la observación 4.13. Entonces la proposición 8.45 implica que $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín.

Por último (2) es consecuencia del corolario 4.17 y de las proposiciones 8.37 y 8.45. □

Observación 8.49. Aunque hemos escrito la matriz de f respecto de las referencias cartesianas canónicas y la de $\overline{f}$ respecto de las referencias proyectivas canónicas, podemos llevar a cabo los mismos argumentos para un par de referencias cartesianas cualesquiera $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathscr{R}' = \{o'; v'_1, \ldots, v'_m\}$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ respectivamente y para sus referencias proyectivas "asociadas", $\overline{\mathscr{R}}$ y $\overline{\mathscr{R}'}$, donde $\overline{\mathscr{R}}$ es la referencia proyectiva que tiene a la base $\{i_n(o), \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ como base asociada y $\overline{\mathscr{R}'}$ es la referencia proyectiva que tiene a la base $\{i_m(o'), \tilde{v}'_1, \ldots, \tilde{v}'_n\}$ como base asociada (si $v_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, entonces $\tilde{v}_i = (0, x_{i1}, \ldots, x_{in})$; $\tilde{v}'_j$ se define a partir v'_j de manera análoga).

A continuación vemos varios ejemplos de completados de aplicaciones afines:

Ejemplo 8.50. *(traslaciones)* Sea t_v una traslación de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ de vector $v \neq \overrightarrow{0}$. El completado $\overline{t}_v$ de t_v es una proyectividad cuyo conjunto de puntos fijos es el hiperplano del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Como la matriz de t_v respecto de una referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{p; v, v_2, \ldots, v_n\}$ es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.50.1}$$

existen referencias proyectivas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por ejemplo $\overline{\mathscr{R}}$, respecto de las cuales $\overline{t}_v$ tiene a N como matriz asociada.

Ejemplo 8.51. *(homotecias)* Sea h una homotecia de centro o y razón $\lambda \neq 0, 1$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. El completado $\overline{h}$ de h es una proyectividad cuyo conjunto de puntos fijos es la unión del hiperplano del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y el punto $i(o)$. Como la matriz de h respecto de una referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ (donde B es una base cualquiera de $\mathbf{k}^n$) es

$$N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

existen referencias proyectivas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por ejemplo $\overline{\mathscr{R}}$, respecto de las cuales $\overline{h}$ tiene a N' como matriz asociada.

Hemos visto que tanto el completado proyectivo de una traslación como el completado proyectivo de una homotecia tienen un hiperplano de puntos fijos (la compleción de la traslación no tiene más puntos fijos y la compleción de la homotecia tiene un punto fijo más). Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 8.52. Sea g una proyectividad de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n en sí mismo, distinta de la identidad. Decimos que g es una *homología* si g tiene un hiperplano de puntos fijos.

Proposición 8.53. *Sea g una* homología *de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$. Entonces el conjunto de puntos fijos de g es*

(1) *un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$; o*
(2) *la unión de un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ y otro punto fuera de ese hiperplano.*

En el primer caso, existe una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ respecto de la cual la matriz de g es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.53.1}$$

En el segundo caso, existe una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ *respecto de la cual la matriz de* g *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{8.53.2}$$

para algún $\lambda \in \mathbf{k}$, $\lambda \neq 0, 1$.

Demostración. Sea ψ un automorfismo de V tal que g viene inducido por él. Según la proposición 8.20, existe un hiperplano vectorial W de V formado por vectores propios de ψ, por lo que ψ tiene un valor propio λ no nulo (porque ψ es un isomorfismo) de multiplicidad algebraica como mínimo n. Distinguimos dos casos: que la multiplicidad algebraica de λ sea $n+1$ o que sea n.

En el primer caso la multiplicidad geométrica de λ ha de ser n porque de otra forma ψ sería $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$ y g sería la identidad. Por tanto la forma canónica de Jordan de $\lambda^{-1} \cdot \psi$ es (8.53.1). Por tanto, existe una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V respecto de la cual la matriz de $\lambda^{-1} \cdot \psi$ es (8.53.1) y $W = L(v_1, \ldots, v_n)$ es el conjunto de todos los vectores propios de ψ. De ello se sigue que si $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ que tiene a B como base asociada, la matriz de g respecto de $\mathscr{R}$ es (8.53.1) y $\mathbf{P}(W)$ es el conjunto de puntos fijos de g.

En el segundo caso el polinomio característico de ψ es $c(t-\lambda)^n(t-\lambda')$, donde $c, \lambda \in \mathbf{k}^*$, $\lambda' \neq \lambda$. En ese caso la forma canónica de Jordan de $\psi' = \lambda'^{-1} \cdot \psi$ es, después de renombrar λ/λ' como λ, la matriz (8.53.2). Por tanto, existe una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V respecto de la cual la matriz de ψ' es (8.53.2) y el conjunto de vectores propios de ψ es $L(v_0) \cup W$ (y $W = L(v_1, \ldots, v_n)$). De ello se sigue que si $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ que tiene a B como base asociada, la matriz de g respecto de $\mathscr{R}$ es (8.53.2) y el conjunto de puntos fijos de g es $\mathbf{P}(W) \cup [v_0]$. □

Continuamos ahora la definición 8.52.

Definición 8.54. Sea g una homología de $\mathbf{P}(V)$.

(1) Si g es como en (1) de la proposición 8.53 decimos que g es una *homología especial*. Si H es el hiperplano de puntos fijos de g decimos que H es el *eje* de g. Si v_1 es el segundo vector de la base B que aparece en la demostración de la proposición 8.53, decimos que $[v_1]$ es el *centro* de g. A las homologías especiales también se las denomina *elaciones*.
(2) Si g es como en (2) de la proposición 8.53 decimos que g es una *homología general*. Si el conjunto de puntos fijos de g es $H \cup \{p_0\}$, donde H es un hiperplano y p_0 es un punto fuera de H, decimos que H es el *eje* de g y que p_0 es el *centro* de g. Si λ es el escalar que aparece en (8.53.2), decimos que λ es la *razón* de g.

Observación 8.55. ¡Cuidado! El centro de una homología tal como se ha definido en la definición 8.54 no tiene nada que ver con el centro de una aplicación proyectiva, tal como se definió en la definición 8.2. De hecho, una homología es una proyectividad, por lo que, vista como aplicación proyectiva, tiene centro vacío.

Observación 8.56. La forma en que hemos descrito las homologías en la demostración de la proposición 8.53 es bastante algebraica, pero existe una descripción más geométrica y sintética que puedes encontrar en el teorema 8.13 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo (aunque tendrás que esperar a la siguiente sección para poder entenderla pues usa el concepto de *razón doble*). Esta descripción incluye una caracterización geométrica tanto del centro de una homología especial (la definición que hemos dado nosotros de centro de una homología especial no solo es algebraica sino que parece bastante ad–hoc) como de la razón de una homología general.

Hemos visto en los ejemplos 8.50 y 8.51 que el completado proyectivo de una traslación es una homología especial mientras que el completado proyectivo de una homotecia es una homología general. Sin embargo, tal como veremos en el ejercicio 8.57, las traslaciones y las homotecias no son los únicos isomorfismos afines de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ cuyo completado proyectivo es una homología; también tienen esta propiedad las transvecciones y las dilataciones con base un hiperplano (para la definición de dilatación y de transvección consulta el ejercicio 3.30 y la definición 3.36).

Ejercicio 8.57. Sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en sí mismo y sea $\overline{f}$ su completado proyectivo.

(1) Demuestra que $\overline{f}$ es una homología especial si y solo si f es una traslación o una transvección.
(2) Demuestra que si f es una traslación de vector v entonces el eje de $\overline{f}$ es el hiperplano del infinito y el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ (donde, si $v = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $\tilde{v} = (0, x_1, \dots, x_n)$).
(3) Demuestra que si f es una transvección de eje L y v es el vector del apartado (3) del ejercicio 4.25 entonces el eje de $\overline{f}$ es $\overline{L}$ y el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ ($\tilde{v}$ se define como en el apartado (2)).
(4) Demuestra que $\overline{f}$ es una homología general si y solo si f es una homotecia o una dilatación con base un hiperplano.
(5) Demuestra que si f es una homotecia de centro o y razón λ entonces el eje de $\overline{f}$ es el hiperplano del infinito, el centro de $\overline{f}$ es $i(o)$ y la razón de $\overline{f}$ es λ.
(6) Demuestra que si f es una dilatación de base un hiperplano afín L, dirección $L(v)$ y razón μ entonces el eje de $\overline{f}$ es $\overline{L}$, el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ (donde $\tilde{v}$ se define como en el apartado (2)) y la razón de $\overline{f}$ es μ^{-1}.

Observación 8.58. La proposicion 8.53 nos dice entre otras cosas que si elegimos para cada homología especial g una referencia proyectiva adecuada, la matriz de g respecto a esa referencia será la que aparece en (8.53.1). Esto quiere decir que dos homologías especiales son *indistinguibles* desde el punto de vista proyectivo. Sin embargo el completado proyectivo de una traslación y de una transvección (que son isomorfismos afines cualitativamente muy distintos, ya que el primero no tiene puntos fijos y el segundo tiene un hiperplano de puntos fijos) es en ambos casos una homología especial. ¿Cómo es esto posible? La razón es la siguiente. Si f_1 es una traslación, existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}_1$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ respecto de la cual la matriz de f_1 es

$$\text{(8.58.1)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si f_2 es una transvección, existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}_2$ de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ respecto de la cual la matriz de f_2 es

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}. \tag{8.58.2}
$$

Entonces la matriz de $\overline{f_1}$ respecto de la referencia proyectiva $\overline{\mathscr{R}_1}$ de $\mathbf{P}^n_\mathbf{k}$ es (8.58.1) y la matriz de $\overline{f_2}$ respecto de la referencia proyectiva $\overline{\mathscr{R}_2}$ de $\mathbf{P}^n_\mathbf{k}$ es (8.58.2). Es posible pasar de (8.58.1) a (8.58.2) mediante un cambio de coordenadas homogéneas, por ejemplo, mediante el cambio entre las referencias proyectivas $\overline{\mathscr{R}_1}$ y $\overline{\mathscr{R}_2}$. Sin embargo, después de dicho cambio, el hiperplano del infinito, que tenía ecuación $x_0 = 0$, ya no tiene ecuación $x'_0 = 0$. Eso quiere decir que ese cambio de coordenadas homogéneas no es el *completado proyectivo* de ningún cambio de coordenadas cartesianas. En efecto, no existe ningún cambio de referencias cartesianas que transforme la matriz (8.58.1) en la matriz (8.58.2). Sabemos sin embargo por el ejercicio 8.57 que si el completado proyectivo $\overline{f}$ de un isomorfismo afín f es una homología especial, f es necesariamente una traslación o una transvección y que la forma de saber si es una cosa o la otra es el comportamiento de $\overline{f}$ en el hiperplano del infinito: si el hiperplano del infinito es el eje de $\overline{f}$ (es decir, si todos los puntos del plano del infinito son puntos fijos de $\overline{f}$), entonces f es una traslación y si el hiperplano del infinito no es el eje de $\overline{f}$ (es decir, si no todos los puntos del plano del infinito son puntos fijos de $\overline{f}$), entonces f es una transvección. Así pues, completar el espacio afín afín nos hace ver que, aunque desde el punto de vista afín una traslación y una trasvección son isomorfismos afines distintos, si miramos "más allá", vemos que no lo son. Una trasvección tiene un hiperplano de puntos fijos. Una traslación también "tiene" un hiperplano de puntos fijos: el hiperplano del infinito.

De la proposicion 8.53 se deduce también que dos homologías generales de la misma razón son indistinguibles desde el punto de vista proyectivo. Sin embargo el completado proyectivo de una homotecia de razón λ y de una dilatación con base un hiperplano y razón λ^{-1} (que son isomorfismos afines cualitativamente muy distintos, ya que el primero tiene solo un punto fijo y el segundo tiene un hiperplano de puntos fijos) es en ambos casos una homología general de razón λ. Los motivos de esta aparente paradoja son los mismos que explicamos antes en el caso de traslaciones, transvecciones y homologías especiales. Igual que entonces, una dilatación con base un hiperplano tiene un hiperplano de puntos fijos pero "tiene" un punto fijo más en el infinito. Una homotecia tiene un punto fijo "afín" y "tiene" además un hiperplano de puntos fijos: el hiperplano del infinito.

Ejercicio 8.59. Describe el conjunto de puntos fijos y, eligiendo una referencia adecuada, da la matriz más sencilla posible para el completado proyectivo de una dilatación de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ de base no necesariamente un hiperplano.

Terminamos esta subsección viendo cómo son los completados proyectivos de proyecciones y simetrías:

Ejemplo 8.60. *(proyecciones)* Sea π la proyección en $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$, sobre un subespacio afín L paralelamente a un subespacio vectorial U de $\mathbf{k}^n$ (recuerda que U y la dirección de L han de ser subespacios vectoriales complementarios). El completado $\overline{\pi}$ de π es la proyección sobre $\overline{L}$ con centro $\mathbf{P}(\widetilde{U})$, donde $\widetilde{U} = \vec{i_n}(U)$ e

$$\begin{array}{cccc} \vec{i_n}: & \mathbf{k}^n & \longrightarrow & \mathbf{k}^{n+1} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (0, x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

En particular, los puntos fijos de $\overline{\pi}$ son los puntos de $\overline{L}$. Puedes comprobar todo esto de manera geométrica o escribiendo la matriz de $\overline{\pi}$ respecto de una referencia proyectiva adecuada, tal y como hemos hecho en los ejemplos 8.50 y 8.51.

Observación 8.61. Entendamos el ejemplo 8.60 de una forma más intuitiva. En $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ consideramos una proyección π sobre un plano L, paralelamemte a una recta afín l. Podemos pensar que L es el suelo y las rectas paralelas a l, cuya dirección seguimos al proyectar, son los rayos del sol, que en este modelo afín está infinitamente lejos (por eso sus rayos son paralelos). Es decir, en este caso el sol estaría “fuera” de nuestro modelo. Cuando completamos $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ para obtener $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$, el sol, que estaba fuera del modelo afín, se convierte en un punto de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ (es uno de los puntos del infinito que hemos añadido), o sea, que ahora el sol está dentro de nuestro modelo proyectivo. De hecho el sol sería el punto del infinito p de la recta l y es el punto desde el cual proyectamos (es el centro de la proyección $\overline{\pi}$). Es decir, que ahora los rayos sí salen desde un punto de nuestro espacio, el punto p de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$.

Ejemplo 8.62. *(simetrías)* Sea σ la simetría en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, respecto de un subespacio afín L de dimensión l, paralelamente a un subespacio vectorial U de $\mathbf{k}^n$ de dimensión u (recuerda que U y la dirección de L han de ser subespacios vectoriales complementarios, por lo que $l + u = n$). El conjunto de puntos fijos del completado $\overline{\sigma}$ de σ es $\overline{L} \cup \mathbf{P}(\widetilde{U})$, donde $\widetilde{U} = \vec{i_n}(U)$ e $\vec{i_n}$ se define como en el ejemplo 8.60. Puedes comprobar todo esto de forma geométrica o desmostrando que, respecto de una referencia proyectiva adecuada, la matriz de $\overline{\sigma}$ es una matriz diagonal de orden $n+1$ con $l+1$ unos y u menos unos en la diagonal. La proyectividad $\overline{\sigma}$ es una proyectividad *involutiva*, es decir, cumple $\overline{\sigma}^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}}$. Para las propiedades de las proyectividades involutivas y para una descripción y caracterización geométrica de las mismas, puedes consultar el teorema 8.12 de los “Apuntes de Geometría Proyectiva” de E. Arrondo (aunque para entender el enunciado y leer la demostración de dicho teorema deberás esperar a la siguiente subsección ya que la razón doble juega un papel protagonista en el teorema).

La razón doble.

Igual que en el caso afín el concepto de razón simple nos servía para caracterizar las aplicaciones afines (ya que estas son las aplicaciones que llevan puntos alineados a puntos alineados y conservan la razón simple de las ternas de puntos alineados), en geometría proyectiva existe el concepto de *razón doble* de una *cuaterna* de puntos alineados y las proyectividades se van a caracterizar por llevar puntos alineados a puntos alineados y por conservar la razón doble.

Definición 8.63. *(Razón doble)* Sea (a, b, c, d) una *cuaterna ordenada* de puntos alineados de un espacio proyectivo sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, tales que a, b y c son puntos distintos, y sea l la recta que los contiene. Sea f la proyectividad de l a $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ que lleva a a $(0:1)$, b a $(1:0)$ y c a $(1:1)$. Entonces, si $f(d) = (\rho_0 : \rho_1)$, llamamos *razón doble* de a, b, c, d y la denotamos por $[a, b, c, d]$ a $\rho = \rho_1/\rho_0$.

Observación 8.64. La razón doble $[a, b, c, d]$ de cuatro puntos alineados distintos a, b, c, d es un número de $\mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$. En efecto, como $d \neq a, b, c$ y f es una biyección, $(\rho_0 : \rho_1) \neq (1:0), (0:1), (1:1)$ por lo que el cociente ρ_1/ρ_0 es un número bien definido de $\mathbf{k}$ y no puede ser ni 0 ni 1. Por otra parte, si $\rho \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0,1\}$, $(\rho : 1) \neq (1:0), (0:1), (1:1)$ y si definimos $d := f^{-1}(\rho : 1)$, es claro que $[a,b,c,d] = \rho$. Por tanto, todo $\rho \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0,1\}$ se realiza como la razón doble de cuatro puntos alineados distintos.

Observación 8.65. Observa que, como a, b, c son puntos distintos, $\mathscr{R} = \{b, a; c\}$ es una referencia proyectiva de l. Entonces, $(\rho_0 : \rho_1)$ son las coordenadas del punto d respecto de $\mathscr{R}$.

Observación 8.66. Podemos definir la razón doble de una cuaterna ordenada (a, b, c, d) de puntos alineados en el caso en que a, b, c sean distintos y d sea igual a a, b o c con el siguiente convenio:

$$[a,b,c,a] = \infty,$$
$$[a,b,c,b] = 0,$$
$$[a,b,c,c] = 1$$

(observa que este convenio es coherente con la definición dada de razón doble de cuatro puntos distintos).

Observación 8.67. La definición 8.63 que hemos dado de razón doble no es unánime. Para algunos la razón doble es ρ_0/ρ_1, es decir, la inversa de la que hemos definidos nosotros. Como ejercicio, comprueba que la definición 8.63 de razón doble coincide con las definiciones de razón doble que puedes encontrar en el capítulo 3 de "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo, en el capítulo V.6 de "Geometry", de M. Audin, o en la definición V.1.1 de "Lecciones de Geometría Proyectiva", de J.M. Rodríguez y J. M. Ruiz (¡pero ten cuidado con la notación de estos textos, que puede ser diferente a la nuestra!). Comprueba que, por el contrario, lo que nosotros hemos definido como razón doble es la inversa de la definida en la definición 3.2.1 de "Nociones de Geometría Proyectiva", de E. Outerelo y J.M. Sánchez.

La propiedad más importante de la razón doble es que es conservada por las proyectividades:

Proposición 8.68. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos y sea $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una proyectividad. Entonces f*

(1) *lleva puntos alineados distintos a puntos alineados distintos y*
(2) *conserva la razón doble de cuaternas ordenadas de puntos alineados.*

Demostración. Sabemos que las aplicaciones proyectivas llevan puntos alineados a puntos alineados. Por otra parte, como f es una proyectividad, f es inyectiva y lleva puntos distintos a puntos distintos. Sean ahora a, b, c, d cuatro puntos alineados distintos de $\mathbf{P}(V)$ y sea l la recta de $\mathbf{P}(V)$ que los contiene. Como f es una proyectividad, $l' = f(l)$ es una recta de $\mathbf{P}(V')$. Consideramos la referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{b, a; c\}$ de l. Como $f(a), f(b), f(c)$ son puntos distintos de l', forman una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(b), f(a); f(c)\}$ de l'. Sean ahora $(\rho_0 : \rho_1)$ las coordenadas de d respecto de $\mathscr{R}$. Si $B = \{v_0, v_1\}$ es una base asociada de $\mathscr{R}$ y $\phi : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo que induce f, $B' = \{\phi(v_0), \phi(v_1)\}$ es una base asociada a $\mathscr{R}'$. Entonces $d = [\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1]$ y $f(d) = [\phi(\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1)] = [\rho_0\phi(v_0) + \rho_1\phi(v_1)]$, por lo que las coordenadas de $f(d)$ respecto de $\mathscr{R}'$ son también $(\rho_0 : \rho_1)$. El resultado se sigue de la observación 8.65. □

Al igual que la razón simple sirve para caracterizar las aplicaciones afines, la razón doble sirve para caracterizar las proyectividades. Así, el recíproco de la proposición 8.68 es cierto y tenemos el siguiente teorema cuya demostración no daremos (puedes encontrarla por ejemplo en el Teorema 7.9, "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo):

Teorema 8.69. *Sea* $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ *una aplicación biyectiva entre dos espacio proyectivos* $\mathbf{P}(V)$ *y* $\mathbf{P}(V')$. *Entonces* f *es una proyectividad si y solo si* f *lleva puntos alineados a puntos alineados y conserva la razón doble de cuaternas ordenadas de puntos alineados.*

Como en el caso afín, un resultado más fuerte (y sorprendente) es cierto (puedes encontrar una demostración del mismo en "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo, teoremas 7.13 y 7.14):

Teorema 8.70. *Sea* $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ *una aplicación entre dos espacios proyectivos* reales *de dimensión mayor que* 1. *Entonces* f *es una proyectividad si y solo si* f *transforma biyectivamente rectas en rectas.*

A las aplicaciones entre espacios proyectivos de dimensión mayor que 1 que transforman biyectivamente rectas en rectas las llamaremos *colineaciones.* El teorema 8.70 dice entonces que, para espacios proyectivos reales, los conceptos de proyectividad y colineación son equivalentes. Cuando el cuerpo $\mathbf{k}$ es arbitrario lo que se tiene es que una aplicación entre espacios proyectivos de dimensión mayor que 1 es una colineación si y solo si es una *semiproyectividad.* Una semiproyectividad es una aplicación entre espacios proyectivos inducida por un *semi-isomorfismo* de espacios vectoriales. Un semi-isomorfismo de espacios vectoriales es una aplicación biyectiva *semilineal.* Una aplicación semilineal ϕ entre dos espacios vectoriales V y V' sobre $\mathbf{k}$ es una aplicación que respeta la suma pero que no respeta el producto por escalares sino módulo un automorfismo de $\mathbf{k}$. De forma precisa, ϕ es semilineal si para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ y existe un automorfismo ϑ de $\mathbf{k}$ tal que, para todo $\lambda \in \mathbf{k}$ y para todo $v \in V$, $\phi(\lambda v) = \vartheta(\lambda)v$. Como $\mathbf{R}$ no tiene más automorfismos que la identidad (consulta "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo, teorema 7.14 o "Geometría", de S. Xambó, corolario 1.43), una semiproyectividad entre espacios proyectivos reales de dimensión mayor que 1 es una proyectividad, de ahí la equivalencia enunciada en el teorema 8.70.

Vemos a continuación cómo calcular la razón doble en la práctica:

Proposición 8.71. *Sean* a, b, c, d *cuatro puntos distintos de una recta proyectiva* l *y sea* $\mathscr{R}$ *una referencia proyectiva de* l. *Si las coordenadas de* a, b, c, d *respecto de* $\mathscr{R}$ *son respectivamente* $(a_0 : a_1), (b_0 : b_1), (c_0 : c_1), (d_0 : d_1)$, *entonces*

$$[a, b, c, d] = \frac{\det \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}}.$$

Demostración. Ejercicio. □

La fórmula de la proposición 8.71 nos permite ver fácilmente cómo cambia la razón doble si permutamos los puntos a, b, c, d de una cuaterna ordenada. Por ejemplo, es claro que $[a, b, c, d] = [b, a, d, c]$ o que $[b, a, c, d]$ es la inversa de $[a, b, c, d]$ (esto también se puede comprobar a partir de la definición). Como ejercicio, puedes demostrar que si $[a, b, c, d] = \rho$, los valores de la razón doble de las permutaciones de a, b, c, d son $\rho, \frac{1}{\rho}, 1 - \rho, \frac{1}{1-\rho}, \frac{\rho}{\rho-1}, \frac{\rho-1}{\rho}$.

Vemos ahora el porqué del nombre "razón doble". Como las proyectividades conservan la razón doble y toda recta proyectiva es isomorfa $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, hacemos nuestro argumento para la razón doble de cuatro puntos de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$. Recordemos que $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}(\mathbf{k}^2)$. Si imitamos, para $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, la construcción del plano proyectivo estándar como compleción del plano afín estándar (que sumergíamos en $\mathbf{k}^3$ como el plano de ecuación $x_0 = 1$), es claro que podemos ver $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ como la unión $\{(x_0 : x_1) : x_0 \neq 0\} \cup \{(0 : 1)\}$. Así pues, identificamos el conjunto $\{(x_0 : x_1) : x_0 \neq 0\}$ de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ como la recta afín $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$, identificando el punto de coordenadas proyectivas $(1 : \xi)$ con el punto de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ de coordenada afín ξ. Consideramos entonces $a, b, c, d \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, puntos distintos de $(0 : 1)$. Dichos puntos serán de la forma $a = (1 : \alpha), b = (1 : \beta), c = (1 : \gamma), d = (1 : \delta)$ y corresponden a los puntos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$. Por la proposición 8.71,

$$[a, b, c, d] = \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

y esto se puede reescribir como el siguiente cociente de razones simples de puntos de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$:

$$[a, b, c, d] = \frac{(\beta\,\gamma\,\delta)}{(\alpha\,\gamma\,\delta)}.$$

Es decir, $[a, b, c, d]$ es una razón de razones simples, o sea, una razón doble.

Si en argumento anterior consideramos $a = (0 : 1), b = (1 : \beta), c = (1 : \gamma), d = (1 : \delta)$ (es decir, a sería el punto del infinito de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$), obtenemos que $[a, b.c, d] = (\beta\,\gamma\,\delta)$. Recordemos que β es el punto medio del segmento $\overline{\gamma\delta}$ si y solo si $(\beta\,\gamma\,\delta) = -1$. Por tanto, dados cuatro puntos a, b, c, d en una recta proyectiva l, $[a, b.c, d] = -1$ si a es el punto del infinito y b es el "punto medio" de $\overline{cd}$ (escribimos punto medio entre comillas porque, en geometría proyectiva no tiene sentido hablar de punto medio de un segmento; sí lo tiene cuando fijamos un punto del infinito en l y esto nos permite considerar un segmento de una recta proyectiva como un segmento de una recta afín). Si $[a, b, c, d] = -1$ decimos que (a, b, c, d) es una *cuaterna armónica*.

Hasta ahora hemos visto que, de forma natural, la geometría afín y la geometría proyectiva están relacionadas (compleción de subespacios y aplicaciones afines). Sin embargo, no parece tan claro qué relación puede haber entre los conceptos métricos o euclídeos y los conceptos proyectivos. Pues bien, la razón doble nos permite hacer esta conexión. Primero interpretamos los ángulos en el plano euclídeo en términos de la razón doble de puntos del infinito y después vemos que las semejanzas del plano afín euclídeo se caracterizan por ser aquellos isomorfismos afines cuyos completados proyectivos dejan invariantes los *puntos cíclicos* (definidos en el ejercicio 3 de la lista de ejercicios de Geometría Proyectiva).

Proposición 8.72. *Sea $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el plano afín euclídeo estándar con la orientación usual. Sean $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ dos vectores de $\mathbf{R}^2$, sean $p_1 = (0 : v_1 : v_2)$ y $p_2 = (0 : w_1 : w_2)$ los puntos del infinito correspondientes a $L(v)$ y $L(w)$ respectivamente y sean $I = (0 : 1 : i)$ y $J = (0 : 1 : -i)$ los puntos cíclicos. Entonces, $[I, J, v, w] = cos2\theta + isen2\theta$, donde θ es el ángulo que va de w a v en el sentido antihorario (es decir, el ángulo orientado entre w y v). En particular, dos rectas afines l_1 y l_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ son perpendiculares si y solo si sus puntos del infinito respectivos p_1 y p_2 cumplen $[I, J, p_1, p_2] = -1$ o, lo que es lo mismo, (I, J, p_1, p_2) son una cuaterna armónica.*

Demostración. Este resultado es la proposición 5.9 de "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo; puedes encontrar una demostración allí. □

Proposición 8.73. *Una isomorfismo afín f del plano afín euclídeo esándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en sí mismo es una semejanza si y solo si el completado proyectivo $\overline{f}$ de f, extendido a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ de la forma natural, deja invariante el conjunto de puntos cíclicos $\{I, J\}$ (es decir, si $\overline{f}\{I, J\} = \{I, J\}$). Además f es directa si y solo si I y J son puntos fijos de $\overline{f}$ e inversa si y solo si $\overline{f}$ intercambia I y J. Por último, una proyectividad g de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ que deje invariante* *la recta del infinito (de la inmersión i de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ *a* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$*) cuya extensión natural a* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ *deje invariante el conjunto de puntos fijos* $\{I, J\}$ *es el completado proyectivo de una isometría de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$*.*

Demostración. Este resultado es la proposición 5.8 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo (ten cuidado con una pequeña discrepancia en la nomenclatura: lo que allí se llama cambio de coordenadas en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y cambio de coordenadas isométrico es lo que en nuestro enunciado llamamos, respectivamente, proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ e isometría). Puedes encontrar una demostración del resultado en dichos apuntes. □

El significado de la proposición 8.73 es el que exponemos a continuación. Hemos visto y continuaremos viendo (en la próxima sección cuando veamos resultados geométricos clásicos pero, sobre todo, cuando estudiemos cónicas en el tema 4) que podemos hacer geometría afín con herramientas proyectivas, siguiendo este razonamiento tipo:

(1) tomamos un problema afín;
(2) lo "proyectivizamos" (añadiendo los puntos del infinito);
(3) resolvemos el problema proyectivo resultante;
(4) obtenemos de la solución del problema proyectivo la información necesaria para resolver el problema afín original (volvemos al espacio afín quitando los puntos del infinito).

Siguiendo el mismo esquema intentaremos hacer geometría afín euclídea usando herramientas proyectivas. Sin embargo, la proposición 8.73 nos dice que usando herramientas proyectivas podemos hacer geometría afín euclídea solo a medias. En efecto, más que geometría afín euclídea (que es la geometría que conserva las distancias, es decir, las formas y los tamaños), la geometría que propiamente se puede hacer usando razonamientos proyectivos es la geometría *conforme* (es decir, la geometría que conserva las formas, pero no necesariamente los tamaños).